

LA CONCOIDE DE NICOMEDES: GÉNESIS Y APLICACIONES

JOSÉ MARÍA AYERBE TOLEDANO

ORCID: 0000-0002-4973-2240

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO. UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Resumen: Los tres problemas clásicos de la matemática griega son la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Estas cuestiones se plantearon muy pronto en la Antigüedad y fueron un reto permanente para los geómetras helenos, actuando como verdaderos catalizadores para el desarrollo de múltiples avances en la investigación. En este artículo se analizan las aportaciones realizadas por Nicomedes para la solución de los dos últimos mediante la introducción de una nueva curva que él mismo llamó la «primera línea concoide». En el trabajo se comparan críticamente las fuentes principales disponibles y se reflexiona sobre la evolución del concepto de curva en la etapa griega.

Palabras clave: trisección del ángulo; duplicación del cubo; concoide; Nicomedes; Pappo; Proclo; Eutocio

The conchoid of Nicomedes: genesis and applications

Abstract: The three classic problems of Greek mathematics are the squaring of the circle, the trisection of any angle and the duplication of the cube. These problems were posed very early in Antiquity and were a permanent challenge for the Hellenic geometers, acting as true catalysts for the development of multiple advances in research. This paper analyzes the contributions made by Nicomedes to the solution of the last two through the introduction of a new curve that he himself called the «first line conchoid». The work critically compares the main available sources and reflects on the evolution of the concept of curve in the Greek period.

Keywords: trisection of any angle; duplication of the cube; conchoid; Nicomedes; Pappus; Proclus; Eutocius

Introducción

Los tres problemas clásicos de la geometría griega se plantearon muy pronto en la Antigüedad debido fundamentalmente a la irrupción de las magnitudes inconmensurables y a las dificultades surgidas en el tratamiento del infinito. Estos problemas no son otros que la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

El problema de la cuadratura del círculo estudia cómo construir, empleando únicamente rectas y circunferencias, un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Por su parte, el problema de la trisección del ángulo consiste en determinar la construcción geométrica que permita dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales, empleando como instrumentos de dibujo, como en el caso anterior, tan solo la regla y el compás. Finalmente, el problema de la duplicación del cubo, conocido asimismo como del mesolabio o de Delos, estudia la forma de obtener, también mediante rectas y circunferencias, un cubo de volumen doble al de uno dado. Aunque los tres problemas resultaron ser de imposible solución, en los términos en los que fueron planteados, el extraordinario ingenio de los grandes matemáticos griegos permitió obtener numerosas respuestas a los mismos ampliando el foco de las que eran admisibles. Una detallada exposición de la historia de los tres problemas clásicos en la Antigüedad puede encontrarse en (Knorr, 1993). Un enfoque diferente, mucho más moderno, se recoge en (Klein, 1980).

La limitación de aceptar únicamente construcciones geométricas que se pudieran realizar mediante el uso exclusivo de la regla y el compás tenía probablemente un origen platónico, pero también tenía un sentido práctico dada la dificultad que había en aquella época para la ejecución de diagramas en los que se utilizaran otras líneas cuyo dibujo era siempre complicado. El hecho de que los tres problemas clásicos no tuvieran solución mediante rectas y circunferencias fue posiblemente lo que motivó que no se incluyeran en los *Elementos* (Euclides, 1991-1994-2008), en los que nada se dice sobre estas cuestiones que, sin embargo, estaban plenamente vigentes a finales del siglo IV a. de C., cuando se escribió el tratado. No obstante, sí se encuentran muchas referencias y aportaciones a estos problemas en otra de las fuentes principales de nuestro conocimiento de la geometría griega, *La Colección Matemática*, un compendio formado por ocho libros, de los que se ha perdido el primero y parte del segundo y del último, elaborado hacia el siglo IV de nuestra era por Papo de Alejandría, uno de los más ilustres matemáticos de la Antigüedad tardía.

En esta obra, superando la limitación platónica, se clasifican los problemas geométricos en planos, sólidos o lineales según que para su solución se precisen construcciones que se ejecuten únicamente con rectas y circunferencias, mediante el uso adicional de las secciones cónicas o con el concurso de otras curvas, respectivamente. De hecho, Papo ya adelanta en *La Colección* un resultado para cuya prueba hubo que esperar hasta el siglo XIX, esto es, que los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo son sólidos, mientras que la cuadratura del círculo es un problema lineal. Además, el maestro alejandrino señaló, como principio de homogeneidad, que cada problema debe resolverse con el

menor aparato matemático posible en el sentido de que, si un problema es plano no serían admisibles las soluciones que utilizaran otras curvas distintas de las rectas y circunferencias, mientras que si es sólido solo deberían considerarse las que se concretaran mediante secciones cónicas.

Por infringir este principio de homogeneidad en alguno de sus resultados, Papo critica a Apolonio y a Arquímedes en el Libro IV de *La Colección* (Pappus, 2010: 145 (#36)), expresándose en los siguientes términos:

«Parece ser un grave error en el que caen los geómetras cuando uno descubre la solución de un problema plano mediante el uso de cónicas u otras líneas o lo resuelve mediante un procedimiento extraño como es el caso con el problema de la parábola en el Libro quinto de las *Cónicas* de Apolonio o como hace Arquímedes cuando en su tratado *Sobre las líneas espirales* asume una inserción¹ de carácter sólido con referencia a un círculo; porque es posible sin pedir ayuda a nada sólido encontrar la prueba del teorema dado por Arquímedes».

La introducción de nuevas curvas fue una de las técnicas más habituales utilizadas por los geómetras helenos para obtener soluciones de los tres problemas clásicos. Este es el caso de la concoide de Nicomedes que este, en su obra *Sobre las líneas concoides*, llamó «la primera línea concoide». Esta curva fue utilizada por Nicomedes para obtener soluciones tanto para el problema de la trisección del ángulo como para el de la duplicación del cubo, lo que le permitió ser reconocida por Proclo y Papo como una curva de la clase lineal de interés para las matemáticas. En el artículo se analiza la forma en la que Nicomedes y Papo definieron la línea, incidiendo en las diferencias que se observan y, a partir de ellas, se reflexiona sobre la evolución operada en la concepción de las curvas durante el periodo griego. Asimismo, se detallan las soluciones encontradas por Nicomedes a los dos problemas clásicos mencionados, señalando el papel central que juega la técnica de la inserción de un segmento de longitud prefijada entre dos curvas dadas, llamada habitualmente *neusis* en la literatura especializada, y se profundiza en los aspectos históricos asociados a estos desarrollos a partir de la evaluación de las fuentes principales disponibles.

Génesis de la concoide y evolución de su definición en la Antigüedad

La concoide está atribuida unánimemente a Nicomedes por la literatura clásica griega, siendo las dos fuentes más extensas *La Colección Matemática* de Papo y los *Comentarios al Libro II de la obra de Arquímedes Sobre la esfera y el cilindro* de Eutocio de Ascalón. También Proclo en sus *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* se refiere en diversas ocasiones a la

1. El concepto de inserción se tratará con detenimiento en la sección tercera, pues juega un papel fundamental en las aplicaciones de la concoide a los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo.

curva ideada por Nicomedes, y en (Proclus, 1992: 212, Comentario 272) señala que «Nicomedes hizo uso de sus concoides –una forma de líneas cuya construcción, clases y propiedades él nos ha enseñado, siendo él mismo el descubridor de sus peculiaridades– y así tuvo éxito en trisecar un ángulo rectilíneo cualquiera».

De la vida de Nicomedes, como de la mayor parte de los matemáticos griegos, no se sabe prácticamente nada. Sin embargo, sí es posible datar con bastante exactitud la época en la que vivió a partir de dos hechos conocidos. Por un lado, Eutocio recoge en (Arquímedes y Eutocio, 2005) determinados comentarios despectivos de Nicomedes sobre la solución del problema de la duplicación del cubo ideada por Eratóstenes. Por otra parte, Apolonio se refiere a una cierta curva como la «hermana de la concoide». Esto permite deducir que Nicomedes vivió probablemente durante gran parte del tercer siglo a. de C., siendo contemporáneo de Arquímedes, Eratóstenes y Apolonio, seguramente coetáneo de los dos primeros y algo mayor que el último.

Sobre las contribuciones matemáticas de Nicomedes, aparte de la invención de la concoide y de su aplicación para resolver los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo que veremos en este artículo, solo se sabe lo que nos cuenta Papo en el Libro IV de *La Colección*. En ese texto (Pappus, 2010: 131 (#30)) se relaciona lacónicamente a Nicomedes con el trabajo de Dinostrato en relación con la cuadratriz y la cuadratura del círculo y ello ha dado pie para que en (Pappus, 2010: 248) se especule con la posibilidad de que hubiera sido Nicomedes el primero que aplicó la proposición 1 de la obra de Arquímedes *Sobre la medida del círculo* para cuadrar el círculo utilizando la cuadratriz, una vez que Dinostrato había descubierto la propiedad de rectificación de la circunferencia asociada a dicha curva (Pappus, 2010: 134-136 (#31-32)).

Utilizando el lenguaje actual, la concoide de Nicomedes se definiría de la siguiente forma:

Definición 1. La concoide de Nicomedes.

Dado un punto fijo P , al que llamaremos polo, una recta fija r , a la que llamaremos base, y un segmento de longitud h , al que llamaremos radio, la concoide de Nicomedes se define como el lugar geométrico de los puntos del plano situados sobre las rectas que pasan por P y tales que su distancia al punto de corte de dicha recta con la base r sea igual al radio h .

Como se aprecia en la figura 1, la concoide tiene en general dos ramas, en forma de concha, de ahí su nombre, situadas sobre cada uno de los semiplanos determinados por r . Sin embargo, Nicomedes solo considera la rama que está situada en el semiplano que no contiene al polo P . Obsérvese también que en el caso de que el polo esté situado sobre la base, entonces la concoide no es más que la circunferencia de centro P y radio h , de ahí que resulte adecuado el nombre de «radio» para esa distancia fija.

La ecuación cartesiana de la concoide de Nicomedes puede obtenerse fácilmente como veremos a continuación. Supondremos que tiene el polo en el origen de coordena-

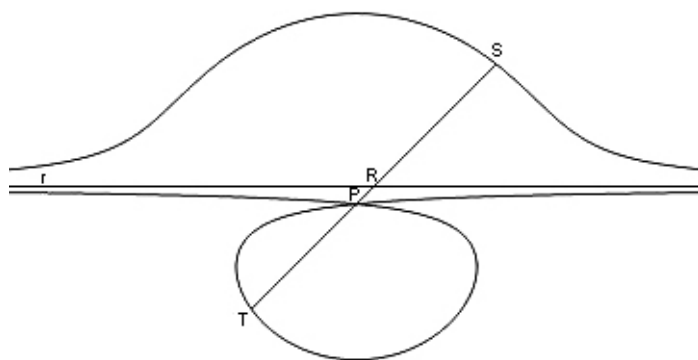


Figura 1. Concoide de Nicomedes de polo P, base r y radio $RS=RT$.

das y sea la base la recta $y=b$ y el radio h . Entonces un punto (x,y) pertenecerá a la concoide si está en una recta de la forma $y=mx$ y su distancia al punto $(bx/y,b)$ es igual al radio h . Se obtiene así que

$$\left(x - \frac{bx}{y}\right)^2 + (y-b)^2 = h^2$$

y, por tanto, la ecuación cartesiana de esta concoide será

$$(x^2 + y^2)(y-b)^2 = h^2 y^2$$

Si en las mismas condiciones tomamos como base la recta $x=a$ la ecuación será

$$(x^2 + y^2)(x-a)^2 = h^2 x^2$$

Haciendo ahora $x = r\cos(t)$ e $y = r\sin(t)$ obtenemos las ecuaciones en coordenadas polares que son, respectivamente,

$$r = \frac{b}{\sin(t)} + h \text{ y } r = \frac{a}{\cos(t)} + h, t \in [0, 2\pi]$$

Nicomedes definió la curva concoide describiendo directamente un instrumento mecánico que permitiría trazarla. La definición de Nicomedes se recogió en su obra *Sobre las líneas concoides*, lamentablemente desaparecida, pero nos ha llegado a través de Eutocio, que en sus

Comentarios al Libro II del tratado de Arquímedes Sobre la esfera y el cilindro (Arquímedes y Eutocio, 2005: 383-385 (III, 98-100,14)) señala lo siguiente remitiéndose a Nicomedes:

«Consideremos dos reglas AB y PD unidas entre sí perpendicularmente como se indica en la figura 2.

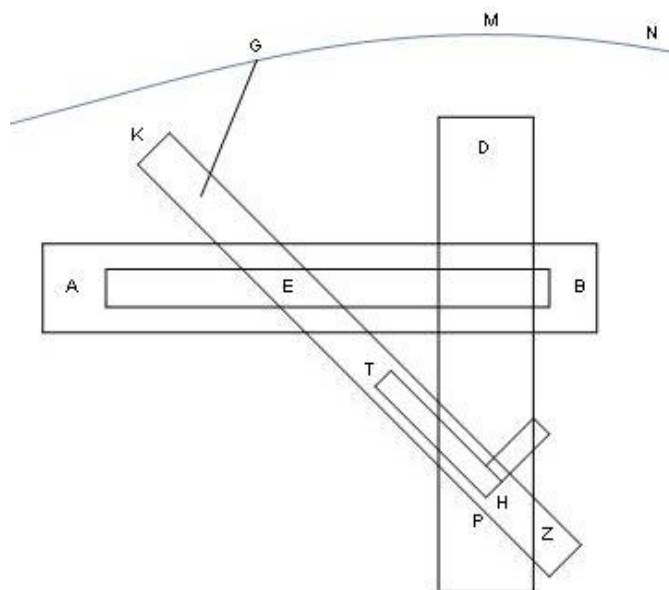


Figura 2. Compás de Nicomedes.²

En la recta AB practiquemos una muesca acanalada por la que pueda correr libremente una cabecilla y en la regla PD por la parte de P y de la recta que corta por la mitad su anchura, un cilindro pequeño que forma cuerpo con la regla y que sobresale un poco de la cara superior de la regla. Finalmente consideremos una tercera regla EZ que presente a lo largo, a poca distancia del extremo Z, un corte de arriba a abajo HT capaz de abrazar el cilindro pequeño y en E un orificio redondo que queda dentro de la muesca acanalada que hay en la regla AB al que pueda ir a parar un vástago que forma cuerpo con la cabecilla que puede correr.

Una vez encajada la regla EZ por un lado en el corte alargado HT, en el cilindrito de P, y por otro en el orificio E mediante el vástago que forma cuerpo con la cabecilla, si uno toma el extremo K de la regla y lo mueve hacia la parte de A y luego hacia la de B, el punto E se desplazará siempre por la regla AB, y el corte alargado HT se moverá

2. Para la elaboración de esta figura se ha tomado como referencia (Netz, 2004: 300).

siempre sobre el cilindro de P, considerando que la recta que hay en medio de la regla EZ pasará siempre en su movimiento por el eje del cilindro de P y que el exceso EK de la regla permanece siempre igual. Si consideramos entonces fijado en K un estilete que corta el suelo, este describirá una línea GMN».

Nicomedes llama a esta curva la «primera línea concoide» y al segmento EK lo denomina «diastema», es decir, «distancia», aunque nosotros lo hemos traducido por «radio» siguiendo a (Arquímedes y Eutocio, 2005: 385 (100, 10-14)). Por su parte, al punto P lo llama «polo», mientras que a la recta AB la denomina simplemente «canon», es decir, «regla», pero nosotros hemos utilizado el vocablo «base» siguiendo a (Heath, 1981: 239). Como vemos también el dispositivo dibuja únicamente la rama de la concoide que está situada en el semiplano determinado por la base AB en el que no está el polo P y no se contempla en principio la posibilidad de que P esté sobre la recta AB.

A continuación, Nicomedes prueba dos propiedades importantes de la concoide que muestran el comportamiento asintótico de la recta base respecto a la curva.

Proposición 2. La línea concoide se acerca cada vez más a la recta base.

Demostración. Sea, en la forma descrita anteriormente, una recta base AB, un polo P, un radio DE y una concoide ZEH. Consideremos dos puntos Z y F en la concoide y las dos líneas PZ y PF tales que $ZC = FK$, siendo C y K, respectivamente, los puntos de corte de dichas líneas con la base AB, tal como se refleja en la figura 3. Hemos de probar que la perpendicular ZM trazada desde el punto Z a la recta AB³ es menor que la perpendicular FN trazada desde el punto F a la recta AB.⁴

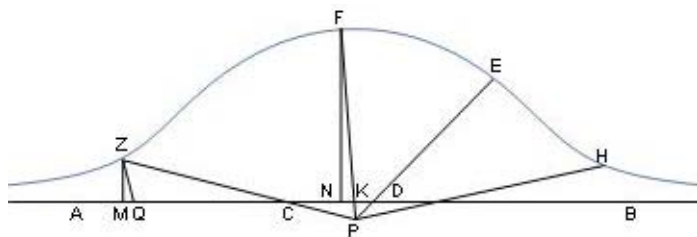


Figura 3. Comportamiento asintótico de la recta base.

Consideremos el triángulo PKC y prolonguemos el lado PK. Se tiene entonces⁵ que el ángulo exterior FKN es mayor que el ángulo interno y opuesto KCP. A su vez, el ángulo KCP es

3. Euclides (I, 11).

4. Euclides (I, 11).

5. Euclides (I, 16).

igual al ángulo ZCM⁶ y así, el ángulo FKN es mayor que el ángulo ZCM. Como además los ángulos en M y en N son rectos, sigue que el ángulo CZM es mayor que el ángulo KFN.⁷

Si ahora construimos el ángulo MZQ, de forma que sea igual a KFN, sigue que los triángulos ZMQ y FNK son equiángulos. En consecuencia⁸ $\frac{FK}{FN} = \frac{ZQ}{ZM}$. Pero como FK=ZC sigue que $\frac{ZC}{FN} = \frac{ZQ}{ZM}$ y, por tanto, $\frac{ZC}{FN} < \frac{ZC}{ZM}$. En consecuencia,⁹ el segmento ZM es menor que el segmento FN, lo que concluye la prueba.

Proposición 3. Cualquier línea recta dibujada entre la recta base y la conoide corta a esta.

Demostración. Consideremos una conoide de polo P, base AB y radio DE. Supongamos en primer lugar que la recta ZHM es paralela a la recta base AB, tal como se indica en la figura 4, y sea K una magnitud tal que $\frac{DH}{PH} = \frac{DE}{K}$.¹⁰

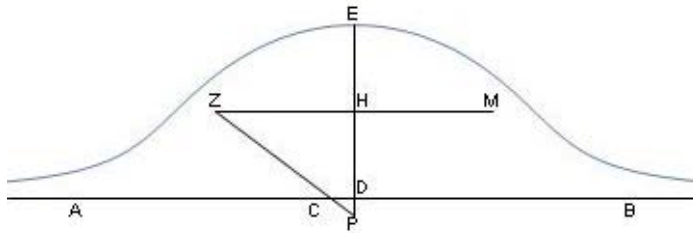


Figura 4. Recta paralela a la base.

Consideremos un círculo con centro en el polo P y radio K. Dado que $\frac{DH}{PH} = \frac{DE}{K}$, sigue que¹¹ $\frac{DH}{DE} = \frac{PH}{K}$ y como DH<DE obtenemos que¹² PH<K. Así, la circunferencia de centro P y radio K y la recta ZHM se cortan e imaginemos que lo hacen en los puntos Z y M de los cuales H es el punto medio.¹³

Se tiene entonces, aplicando¹⁴ al triángulo PZH cortado por la paralela CD al lado ZH, que

$$\frac{DH}{PH} = \frac{CZ}{PZ}$$

6. Euclides (I,15).

7. Euclides (I,32).

8. Euclides (VI, 4).

9. Euclides (Def V,5).

10. Euclides (VI,12).

11. Euclides (V,16).

12. Euclides (Def V, 5).

13. Euclides (III, 3).

14. Euclides (VI, 2 y V, 18).

Pero como $\frac{DH}{PH} = \frac{DE}{K}$ y $K=PZ$, pues Z está sobre la circunferencia de centro P y radio K, si-
gue que $DE=CZ$ y, por tanto, que Z debe estar sobre la concoide. Razonando análogamente
se obtendría que también M debe estar sobre la concoide.

Veamos ahora el caso en el que la recta no es paralela a la recta base AB. Dado que en
este caso la recta cortará a la base AB, la denotaremos por MHN, siendo M el punto de corte
de la recta con AB. Consideremos, asimismo, la recta ZHV paralela a la base AB que pasa
por el punto H, tal como se indica en la figura 5.

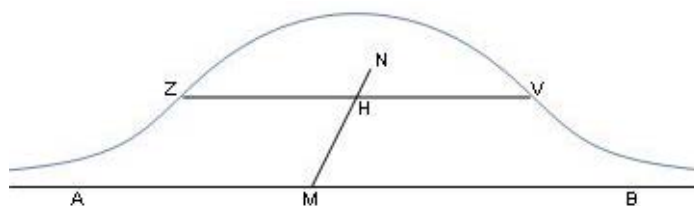


Figura 5. Recta no paralela a la base.

Por el paso anterior la recta ZHV cortará a la concoide en dos puntos Z y V, de forma
que la recta MHN quedará «encerrada» entre la concoide y la recta ZHV, por lo que al pro-
longarla terminará cortando necesariamente a la concoide en algún punto, lo que concluye
la prueba.

Papo también define en el Libro IV de *La Colección* la curva concoide, que trata detalla-
damente, pero lo hace de manera diferente a la seguida por Nicomedes, evitando la genera-
ción en base a un instrumento mecánico. La introducción de la curva dada por Papo es
como sigue (Pappus, 2010: 126 (#26)):

«Consideremos una recta AB y sea CDZ una recta perpendicular a la anterior por el
punto D. Fijemos sobre CDZ un cierto punto P y asumamos que, mientras el punto
P permanece fijo, la recta CDPZ se mueve a lo largo de la recta ADB de forma que el
punto D siempre está sobre la recta AB. Ahora, cuando tal movimiento tiene lugar,
es obvio que el punto C describirá una curva LCM cuya propiedad específica¹⁵ va a
ser que cualquier recta que pasando por P corte a la curva determinará, entre la rec-
ta AB y dicha línea, un segmento de longitud constante CD, tal como se indica en la
figura 6.

Así, mientras la recta AB y el punto P permanecen fijos, cuando el punto D alcanza
el punto H, el segmento CD pasa a ser el segmento TH y el punto C de la curva pasará a

15. Empleamos aquí el término «propiedad específica» de la curva que, a lo largo de todo el texto, será sinónimo del
vocablo griego *symptoma*.

ser el punto T, manteniéndose $CD=TH$. Y similarmente, cualquier recta que pase por el punto P y corte a la línea, determinará entre dicha línea y la recta AB un segmento de longitud CD.»

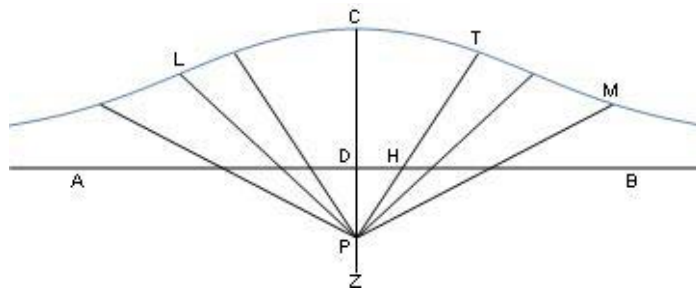


Figura 6. Génesis de la conchoide por Papo.

En este extracto del maestro alejandrino vemos que él genera la conchoide mediante dos movimientos sincronizados: uno, el de la recta que se mueve a lo largo de la base con pivote en el polo P y otro, el del punto D que se mueve sobre la recta de forma que el radio permanece constante. Pero en la definición de Papo se pone el énfasis en que es la propiedad del lugar geométrico la que caracteriza la curva y esta propiedad ya es independiente del movimiento descrito para la génesis. Merece la pena hacer notar la diferencia entre las dos definiciones. Nicomedes, en la versión dada por Eutocio, genera la curva mediante un instrumento mecánico, una especie de compás específico para esta construcción, lo que tiene la ventaja de que permite dibujar la curva. Digamos que el compás materializa el lugar geométrico, pero no pone el énfasis en la definición de este sino en su trazado. Por el contrario, Papo adopta un punto de vista más «analítico», entendiendo que lo verdaderamente importante para que la curva quede bien definida es determinar su «propiedad específica» o *symptoma*, es decir, la relación matemática que cumplen los puntos de la curva y solo ellos. En la concepción de Papo estamos ya más cerca de la ecuación de la curva tal como la entendemos hoy, si bien él la formula retóricamente, puesto que carece de un lenguaje adecuado para expresarla. Sin duda sería un anacronismo otorgar al *symptoma* de la curva especificado por Papo el sentido moderno de ecuación de la línea, pero obviamente el maestro alejandrino dio un paso relevante en la dirección correcta.

A renglón seguido de lo anterior, Papo añade las denominaciones de base, polo y radio para la recta y el punto fijos y para la distancia entre la línea y la base, respectivamente, y da nombre a la curva, siempre remitiéndose a Nicomedes (Pappus, 2010: 127 (#26)):

«Y él [Nicomedes] dice que la recta AB será llamada base, el punto P polo y el segmento CD radio, que es la distancia que hay entre la línea recta y la línea LCM, y fi-

nalmente la línea LCM se llamará primera concoide -ya que también se da una exposición de una segunda, una tercera y una cuarta [concoide] utilizadas para otros teoremas.»

Y, finalmente, Papo se refiere a la forma en la que Nicomedes genera la curva y a sus dos propiedades en los siguientes términos (Pappus, 2010: 127 (#27)):

«Que, no obstante, la línea puede ser descrita con un instrumento y que se extiende a una distancia cada vez menor de la base, es decir, que de todas las perpendiculares desde cualquier punto de la línea LCT a la recta AB la mayor es la perpendicular CD, y que las perpendiculares cercanas a CD son siempre mayores que las más lejanas [prop. 2], y también que cuando alguna línea recta está ubicada entre la recta base y la concoide, cortará a la concoide [prop. 3], ha sido probado por Nicomedes y yo mismo he usado la línea mencionada arriba [...] cuando quise trisecar el ángulo.»

Como vemos en este último comentario Papo, después de haber descrito la génesis de la concoide de forma cinemática y de haber dado su *symptoma*, considera necesario referirse al compás concebido por Nicomedes y a los resultados obtenidos por este, aprobando implícitamente el uso de dispositivos para el trazado de las curvas. En este sentido podemos afirmar que en el siglo IV de nuestra Era, si bien se tenía plena conciencia de que la norma académica para la elaboración de los diagramas geométricos exigía la utilización exclusiva de la regla y el compás, se aceptaba cuando era imprescindible el empleo de otros medios, superando de este modo la concepción platónica del quehacer matemático recogida en la célebre cita de Plutarco en la que se señala la indignación de Platón por el uso de instrumentos mecánicos en la geometría (Plutarco, 2006: 415, (I, 14, 11)):

«Platón se indignó y les reprochó [a Eudoxo de Cnido y Arquitas de Tarento] haber destruido y echado a perder la bondad de la geometría al sacarla de lo incorpóreo e inteligible hacia lo sensible y hacerla utilizar elementos corporales que requerían muchos trabajos manuales penosos.»

Dadas las diferencias en la presentación de la concoide en las dos fuentes que estamos analizando, algunos autores señalan ((Cuomo, 2007: 162-163) y (Pappus, 2010: 229-230)) que la definición de Papo, en términos de la concoide como intersección de dos caminos o de dos movimientos, responde al interés de este por establecer una senda de continuidad con las otras dos curvas estudiadas en el Libro IV de *La Colección*, la espiral y la cuadratriz, las cuales son presentadas en una forma similar. La estrategia de Papo para la caracterización de una curva definida mediante una combinación de movimientos consiste en poner el foco en la determinación de su propiedad específica, esto es, en bus-

car la relación matemática precisa que únicamente cumplen los puntos de la línea y que debe ser independiente del movimiento propiamente dicho. En este contexto la forma de generación de la curva es una cuestión secundaria, incluso irrelevante, y lo único importante es su formulación matemática y la posibilidad de obtener sus propiedades a partir de ella.

Este punto de vista permitió a Papo aceptar plenamente a la cuadratriz y a la espiral, además de a la conchoide, como curvas admisibles en geometría, dentro de la categoría de las lineales. En efecto, la generación de las curvas mediante movimientos sincronizados, como es el caso de las mencionadas, exige que estén libres de contradicciones conceptuales y, por lo tanto, que sea conocida la ratio entre los movimientos implicados. Y el problema que se plantea en la generación de algunas curvas de la clase lineal es que los movimientos que las describen tienen que estar sincronizados de acuerdo con la ratio de la circunferencia con el radio, que es esencialmente π , y esa ratio era desconocida. Esta dificultad ya había sido puesta de manifiesto por autores como Esporo de Nicea, que fue probablemente maestro de Papo, y de hecho este se hace eco de sus críticas en (Pappus, 2010: 132-133 (#31)) al estudiar la cuadratriz. El planteamiento de Papo permite tratar matemáticamente las curvas, obteniendo sus propiedades a partir del *symptoma*, y dejar de lado la cuestión ontológica y epistemológica sobre la naturaleza de las curvas en sí mismas. De esta manera puede obviarse para estas curvas, a través de la obtención de la propiedad específica de cada una de ellas, la inconsistencia conceptual de sus definiciones.

El esfuerzo realizado por Papo para dar carta de naturaleza respetable a las curvas lineales en el Libro IV de *La Colección* es verdaderamente notable. Hay que tener en cuenta, como se señala en (Cuomo, 2007: 153-154), que estas curvas fueron siempre asociadas en la Antigüedad con lo irregular, lo antinatural o lo anómalo y eran consideradas como entidades extrañas y difícilmente definibles. De hecho, en la concepción pitagórica de las matemáticas a que se refiere Proclo en (Proclus, 1992: 29-30, Comentario 36) la geometría se define como la parte de esta ciencia que estudia las magnitudes en reposo, lo que plantea el problema del papel que juega el movimiento en la generación de las curvas. Aunque es obvio que el uso de movimientos no estaba vedado para la génesis de las líneas, y ejemplos como el de la conchoide lo atestiguan, en (Pappus, 2010: pág. 227) se subraya que eso no quiere decir que fuera considerado como parte del discurso matemático por los geómetras helenos.

Para superar todas estas prevenciones, firmemente instaladas en el imaginario colectivo de los matemáticos de la Antigüedad, el maestro alejandrino diseñó toda una estrategia de presentación coherente de estas líneas basada en buscar para cada una de ellas un *symptoma* que les diera naturaleza matemática y que permitiera superar las contradicciones conceptuales asociadas a su génesis, se esmeró por presentar múltiples aplicaciones de las mismas para la resolución de problemas, particularmente de los tres problemas clásicos, y apeló de manera constante a la autoridad de los geómetras anteriores.

Así, Papo sería un claro precursor de Descartes y Leibniz, que ya en el siglo XVII ampliaron la familia de las curvas admisibles en la matemática hasta dar cabida en ella a todas las que utilizamos en la actualidad. Primero Descartes en su *Geometría*, aparecida en el año 1637, dio carta de naturaleza a todas las curvas que hoy llamamos «algebraicas» y posteriormente Leibniz completó el trabajo en su artículo de 1686 *Sobre una geometría altamente oculta y el análisis de los infinitos e indivisibles*, donde señala lo siguiente (Leibniz, 1987: 20-21):

«Por otro lado, me parece bien en este lugar, para decir algo interesante, abrir el camino de las cantidades trascendentes, ya que algunos problemas no son planos ni sólidos ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica.[...] Y como tales problemas realmente pueden ser propuestos en geometría, deben ser considerados sin duda alguna entre los primeros, y son determinados; por esto es necesario ciertamente que estas líneas también se incluyan en la Geometría.»

Pero para dar este paso decisivo y admitir en el seno de la matemática tanto a las curvas algebraicas como a las trascendentes fue esencial la invención de la geometría analítica, cuya aportación fundamental fue precisamente la identificación de las curvas con las ecuaciones correspondientes, situando al álgebra en el centro de la matemática y rompiendo de ese modo con la tradición heredada de la geometría griega. No obstante, la evolución hacia la ecuación ya se vislumbra tímidamente en los desarrollos que acabamos de analizar, si bien la ausencia de un lenguaje adecuado para expresarla, las limitaciones de su sistema numérico y el reducido número de curvas que se consideraron en la Antigüedad no permitió ir más allá. Un estudio detallado del nacimiento de la geometría analítica y de su importancia para el desarrollo posterior de la matemática, especialmente del cálculo infinitesimal, se recoge en (Ayerbe, 2017).

Aplicación al problema de la trisección del ángulo.

Nicomedes inventó la concoide, como señala Proclo en la cita que recogemos al inicio de la sección anterior, con el propósito específico de resolver el problema de la trisección del ángulo por medio de una inserción. Recordemos que los griegos denominaban «inserción»¹⁶ a una relación entre figuras que consiste en admitir que, dadas dos curvas en general y un punto fijo, siempre existe una recta que pasa por el punto fijo, al que llamamos «polo», y tal que su intersección con las curvas dadas determina un segmento de longitud prefijada, denominada «diastema».¹⁷

16. La mayor parte de los autores la denominan *neusis*, trasladando simplemente a nuestro alfabeto el correspondiente vocablo griego. Nosotros utilizaremos ambas palabras como sinónimos en este artículo.

17. Esta palabra traslada a nuestro alfabeto el correspondiente vocablo griego que se traduce literalmente por «distancia».

La utilización de la inserción en las construcciones geométricas es muy frecuente en la matemática griega y los primeros ejemplos datan del siglo v a. de C. Así está documentado que ya la utilizó Hipócrates de Quios para la cuadratura de la tercera lúnula¹⁸, pero quizás el gran maestro en el manejo de la inserción, como en tantas otras facetas, fue Arquímedes, que explotó esta técnica magistralmente en su obra *Sobre las líneas espirales*.

El papel de la *neusis* en la geometría clásica griega ha sido profundamente estudiado en (Zeuthen, 1886) y hoy su punto de vista está ampliamente aceptado. De acuerdo con ello, la operación inserción comenzó históricamente como un argumento matemático legítimo en las construcciones geométricas que no precisaba de ninguna justificación específica. En la práctica, estos problemas eran a menudo resueltos mediante algún procedimiento mecánico, a saber, colocando una regla, mediante prueba, en la posición de la línea requerida, para lo que solo es necesario situar la regla de forma que pase por el polo y, utilizando ese punto como un pivote, girarla adecuadamente hasta que la intersección con las curvas dadas tenga la longitud deseada.

Este procedimiento era todavía válido en la época de Arquímedes y él, como hemos indicado, lo utiliza repetidamente en su obra *Sobre las líneas espirales* sin incluir ningún comentario relativo a la construcción de estas inserciones. Parece ser que fue Apolonio el primero que se dio cuenta de la necesidad de diferenciar entre inserciones planas o sólidas, según que puedan ser resueltas únicamente mediante rectas y circunferencias o con el concurso adicional de las cónicas. Apolonio concibió la operación inserción como algo que puede y debe ser construido a partir de entidades más simples y, gracias a su trabajo, la *neusis* perdió su condición de mero dispositivo en las construcciones geométricas para alcanzar una posición diferente. Desde entonces los griegos comprendieron la necesidad de construirlas específicamente.

La resolución del problema de la trisección del ángulo por medio de una inserción que vamos a ver a continuación se debe a Pappo y está recogida en el Libro IV de *La Colección* (Pappus, 2010: 148-149 (#38-40)), pero sin duda era ya de uso habitual en la época de Nicomedes, aunque no se sabe a ciencia cierta a quien corresponde la autoría de la demostración. Algunos estudiosos sostienen que el primero que la concibió fue Arquímedes, lo cual resulta una hipótesis plenamente plausible dada su maestría en el manejo de las inserciones. No obstante, no puede en modo alguno descartarse que ya fuera conocida en la etapa anterior a Euclides. En la prueba se distinguen tres casos, según que el ángulo sea agudo, recto u obtuso, aunque la dificultad se presenta en el primero de los supuestos. El caso del ángulo recto es prácticamente inmediato y el del ángulo obtuso se deduce de los dos anteriores.

18. Este hecho se recoge en el fragmento relativo a las lúnulas de Hipócrates, de la *Historia de las matemáticas* de Eudemo de Rodas, obra desaparecida, pero de la que nos ha llegado ese extracto a través de una reproducción incluida en un comentario aristotélico de Simplicio del siglo vi de nuestra era. Se reproduce en (Vera, 1970: 680-685).

Proposición 4. Trisección del ángulo mediante inserción.

Demostración. Supongamos en primer lugar que el ángulo ABC sea agudo y desde el punto A tracemos una perpendicular a BC¹⁹ y completemos el rectángulo ACBZ²⁰ como se indica en la figura 7.

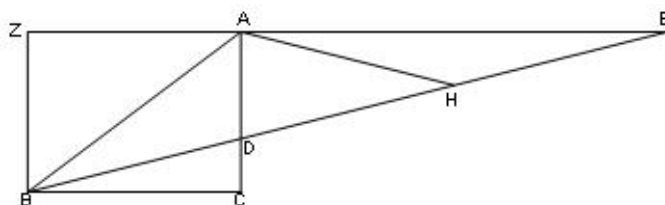


Figura 7. Trisección de un ángulo agudo.

Prolonguemos el segmento ZA hasta un punto E de forma que el segmento EB corte a AC en D verificándose que $DE=2AB$. Aquí tenemos la inserción con polo en B, rectas ZA prolongada y AC y diastema la longitud $2AB$. Se verifica que el ángulo EBC es la tercera parte del ángulo ABC.

En efecto, si bisecamos el segmento DE por el punto H²¹ y unimos AH, se verifica que $DH=HE=AH$, donde la última igualdad es consecuencia de que A está sobre el semicírculo de centro H y radio DH²² al ser recto el ángulo DAE.

Así $DE=2AH$ y como $DE=2AB$ sigue que $AH=AB$ y, por tanto, el triángulo ABH es isósceles, de modo que los ángulos ABD y AHD son iguales.²³ Además, el ángulo $AED=EBC$ ²⁴ y, como el ángulo AED es un ángulo central que abarca el mismo arco que el inscrito AHD, sigue que el ángulo AHD es doble del ángulo AED.²⁵

Sigue, por tanto, que el ángulo $ABD=2EBC$, de donde resulta que el ángulo EBC es la tercera parte del ángulo ABC como se quería demostrar.

Supongamos ahora que el ángulo ABC es recto. Entonces construimos sobre BC un triángulo equilátero.²⁶ Dado que los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales²⁷ y

19. Euclides (I,12).

20. Euclides (I,31).

21. Euclides (I,10).

22. Euclides (III,31).

23. Euclides (I,5).

24. Euclides (I,29).

25. Euclides (III,20).

26. Euclides (I,1).

27. Euclides (I,5).

suman dos rectos,²⁸ basta ahora bisecar el ángulo DBC ²⁹ para obtener el ángulo buscado (o bien considerar directamente el ángulo ABD), todo ello tal como se indica en la figura 8.

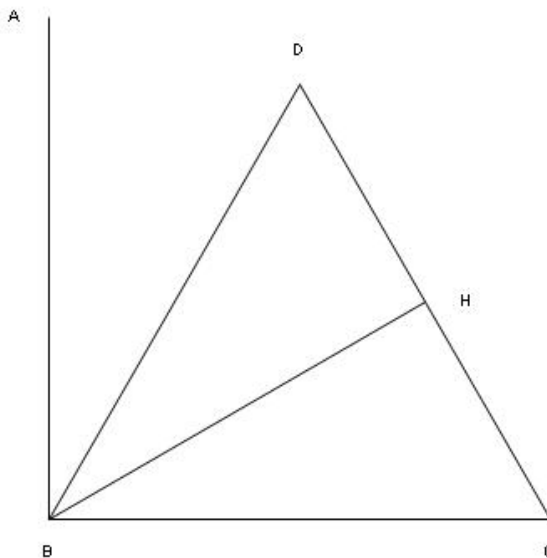


Figura 8. Trisección de un ángulo recto.

Finalmente, si el ángulo ABC es obtuso y dibujamos BD en ángulo recto a CB ³⁰ podemos construir, aplicando los dos resultados anteriores, tanto el ángulo DBZ tercera parte del ángulo recto DBC , como el ángulo EBD tercera parte del ángulo agudo ABD , todo ello tal como se indica en la figura 9.

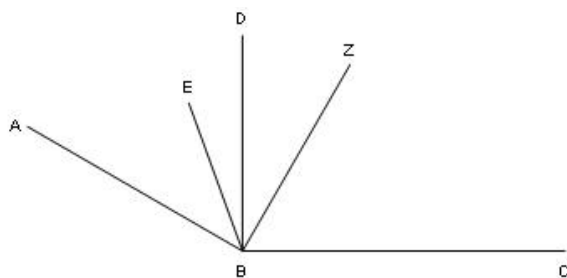


Figura 9. Trisección de un ángulo obtuso.

28. Euclides (I,32).

29. Euclides (I,9).

30. Euclides (I,11).

Así, el ángulo EBZ es la tercera parte del ángulo ABC como se pretendía.

Como hemos señalado, Nicomedes inventó la concoide con el propósito específico de resolver una inserción como la utilizada en la construcción que acabamos de detallar. De hecho, cualquier *neusis* en la que una de las dos líneas dadas, entre las que hay que colocar el segmento de longitud prefijada, sea una recta puede ser resuelta por medio de la intersección de la otra línea con una cierta concoide que tenga como polo el punto fijo de la inserción, como base dicha recta y como radio la longitud prefijada o diastema. El procedimiento para resolver el problema de la trisección del ángulo utilizando la concoide, que debió recoger Nicomedes en su obra perdida *Sobre las líneas concoides*, sería el que se incluye a continuación.

Proposición 5. Trisección del ángulo utilizando la línea concoide.

Demostración. De acuerdo con la construcción realizada por Papo, si partimos de un ángulo ABC y queremos trisecarlo, basta considerar la concoide con polo en B, recta base la perpendicular a BC que pasa por A y radio el doble del segmento AB, tal como se indica en la figura 10.

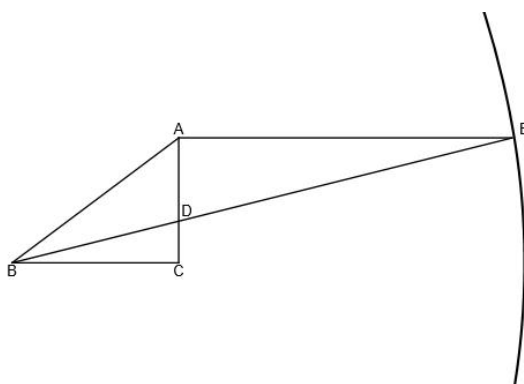


Figura 10. Trisección de un ángulo vía concoide.

Si ahora elegimos el punto de la concoide E que está situado en la perpendicular a la recta base pasando por A,³¹ unimos dicho punto E con el polo B y llamamos D a la intersección de este segmento con la recta base, se tiene por la definición de la concoide que $ED=2AB$ y, en virtud de la construcción de Papo, sigue que el ángulo ABD es doble del ángulo DBC, con lo que hemos trisecado el ángulo de partida ABC.

Como vemos, dada su propiedad específica, la concoide se presta a la solución de problemas que requieran una inserción entre dos líneas una de las cuales es una recta, puesto que permite producir segmentos de una determinada longitud, como es el caso del proble-

31. Que tal punto de la concoide existe sigue de la proposición 3.

ma de la trisección del ángulo. Sin embargo, debe hacerse notar, como el propio Papo puso de manifiesto en el Libro IV de *La Colección* (Pappus, 2010: 150-155 (#41-44)), que este problema es sólido. Probablemente, por este motivo Papo silenció en el texto mencionado la forma de utilizar la línea concoide para resolver el problema de la trisección del ángulo y solo menciona de pasada en (Pappus, 2010: 127 (#27)) que «Yo mismo he usado la línea mencionada arriba [la concoide] en el tratado sobre el analema³² de Diodoro³³ cuando deseaba trisecar el ángulo». Papo también comprobó en el Libro IV de *La Colección* (Pappus, 2010: 155-156 (#45-46)), utilizando la cuadratriz de Hipias y la espiral de Arquímedes, que el problema de la división de un ángulo en cualquier ratio no es ya un problema sólido, sino que es lineal.

Aplicación de la concoide al problema de la duplicación del cubo.

Aunque la concoide se inventó inicialmente con el propósito específico de resolver el problema de la trisección del ángulo por medio de una inserción, como hemos señalado en la sección anterior, Nicomedes también la utilizó en su tratado *Sobre las líneas concoides* para encontrar dos medias proporcionales en proporción continua entre dos magnitudes dadas,³⁴ que serían relevantes para solventar el problema de la duplicación del cubo.³⁵ Las dos fuentes que recogen de manera más extensa y pormenorizada los esfuerzos de los geómetras griegos para resolver este problema son, de nuevo, *La Colección Matemática* de Papo y los *Comentarios al Libro II de la obra de Arquímedes Sobre la esfera y el cilindro* de Eutocio.

Eutocio en sus *Comentarios* hace un esfuerzo verdaderamente notable por recoger todas las soluciones que se habían obtenido en la Antigüedad, tratando de ser exhaustivo e incluyendo además un relato detallado de la historia del problema. Así en (Arquímedes y Eutocio, 2005: 359-388 (III, 54,25-106,25)) se recogen las diferentes soluciones obtenidas por Platón, Herón, Filón el Bizantino, Apolonio, Diocles, Papo, Esporo, Menecmo, Arquitas, Eratóstenes y Nicomedes. Si nos referimos en particular a la respuesta obtenida por este último, que es el objeto específico de este artículo, Eutocio la introduce señalando lo siguiente (Arquímedes y Eutocio, 2005: 383 (III, 98,1-10)):

«Describe Nicomedes en el tratado que tituló *Sobre las líneas concoides* la construcción de un instrumento que cumple el mismo fin, del cual se precia mucho el autor, hacien-

32. Un analema es una proyección ortográfica de la esfera sobre el plano del meridiano, que permite encontrar la altura de un astro en un momento dado.

33. No se ha conservado ninguna obra de Papo con este título.

34. Se dice que dos magnitudes A y B son dos medias proporcionales, en proporción continua, entre otras dos C y D si se verifica que $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \frac{B}{D}$.

35. Se atribuye a Hipócrates de Quíos, en el siglo V a. de C., esta aportación que permitió transformar el problema de la duplicación del cubo, en principio de geometría espacial, en un problema de geometría plana, aunque de dificultad no menor.

do gran mofa de los hallazgos de Eratóstenes, que tiene al tiempo por impracticables y por carentes de valor geométrico. De lo que ha quedado de sus trabajos sobre el problema añadimos en lo posible a lo ya escrito, para su comparación con Eratóstenes, lo que él describió.»

En (Netz, 2004: 299, Nota 190) se señala que «El autor de este pasaje, (probablemente Eutocio, aunque también es posible que algún compilador anterior) no aprueba las polémicas en matemáticas, en un interesante ejemplo del cambio de las costumbres intelectuales que se produce entre la Antigüedad y la Antigüedad tardía». Aunque el orden en el que se recogen en el texto de Eutocio las diferentes soluciones del problema de la duplicación del cubo no respeta la sucesión histórica, las dos últimas, correspondientes a Eratóstenes y Nicomedes, critican expresamente algunas de las anteriores, lo que le da pie a (Netz, 2004: 299, Nota 190) para señalar que:

«La estructura general es clara: Eratóstenes se refiere a muchas de las soluciones precedentes, por lo que tuvo que ser la penúltima; Nicomedes se refiere a Eratóstenes, por lo que tuvo que ser la última. El resultado no buscado es que las polémicas marcan el final de este catálogo: los actores se van batallando, en una ruidosa y vulgar pelea.»

Aunque no es cierto que las soluciones de Eratóstenes y Nicomedes fueran las dos últimas en el orden cronológico, porque las de Apolonio, Diocles, Herón, Esporo y Papo son posteriores en el tiempo, sí resulta llamativo que la impresión final del cuadro sea la disputa entre los diferentes geómetras que aportaron ideas para solventar el enigma. Como sabemos las polémicas en la historia de la matemática han sido muy numerosas y esta entre Nicomedes y Eratóstenes, que se habría desarrollado en el siglo III a. de C., podría ser una de las primeras de las que tenemos noticia.

Papo, en el Libro III de *La Colección*, también estudia en profundidad las diferentes soluciones obtenidas en la Antigüedad al problema de la duplicación del cubo, pero su informe no es tan completo como el de Eutocio, realizado cerca de dos siglos después. Concretamente, Papo se refiere a las soluciones ideadas por Eratóstenes, Nicomedes y Herón e incluye una última de su invención, introduciéndolas de la siguiente forma (Pappus, 2023: 17 (22)): «Explicaremos cuatro soluciones del problema junto con alguna discusión añadida por nosotros. Primero la de Eratóstenes, segundo la de Nicomedes, tercero la de Herón –más adecuada para el trabajo manual de los que desean dedicarse a la arquitectura– y finalmente una encontrada por nosotros».

De sus palabras parece deducirse que no tenía intención de referirse a todas las soluciones de las que tenía conocimiento, sino que eligió únicamente aquellas que le parecieron más adecuadas. Al respecto de esta cuestión debe señalarse que probablemente las fuentes utilizadas por ambos autores serían similares y que las diferencias entre los dos compen-

dios habría que buscarlas más bien en la selección de estas que hizo cada uno de ellos. Mientras que Eutocio tiene la clara intención de ser exhaustivo y, por tanto, se refiere a todas las soluciones del problema délico de las que tenía noticia, con la única excepción de la de Eudoxo, pero porque la considera incorrecta según apunta en (Arquímedes y Eutocio, 2005, 359 (III, 56, 5-11)), Papo sin embargo toma solo aquellas que le interesan en función de su propia visión de la cuestión. En particular, omite todas las referencias históricas y no se hace eco de las críticas entre los diferentes autores que pone de manifiesto Eutocio. En el Libro IV de *La Colección* Papo vuelve a tratar la solución ideada por Nicomedes para el problema del mesolabio y, como indicamos en la sección anterior, estudia detalladamente la conchoide en el marco de un estudio general de las curvas lineales en el que incluye, además, a la cuadratriz y a la espiral.

En cuanto al criterio de selección de Papo parece que la clave estuvo en la facilidad práctica de construcción de las medias proporcionales. Así, en (Pappus, 2023: 17 (21)) señala:

«Ya que las secciones cónicas no son fáciles de describir en el plano [...], ellos [los antiguos geómetras] dibujaron las medias proporcionales utilizando instrumentos maravillosamente adecuados para trabajos manuales y construcciones, como se puede ver en los escritos de Eratóstenes sobre su mesolabio o “constructor de medias” y en *La Mecánica* de Filón y Herón [o *Las Catapultas*] [...] Nicomedes ha resuelto el problema mediante la curva conchoide, con la cual también triseca ángulos».

Merece la pena hacer notar aquí de nuevo la diferente concepción que tenían Platón y Papo sobre la utilización de mecanismos en la geometría. Mientras que para el primero su empleo era poco menos que un sacrilegio, pues sacaban a esta ciencia de su ámbito natural que es el teórico y abstracto, el segundo considera que la preocupación por la concreción material de los descubrimientos es un indicador de la bondad del procedimiento.

Veamos ahora que la conchoide permite la obtención de dos medidas proporcionales, en proporción continua, entre dos segmentos dados y que, en consecuencia, puede utilizarse para resolver el problema de Delos. En este apartado seguiremos fielmente la construcción original de Nicomedes, en la versión recogida por Eutocio en (Arquímedes y Eutocio, 2005: 387-388 (III, 104,6-106,25)), sin más modificación que la elusión de las letras griegas. Esta versión es prácticamente idéntica a la que da Papo tanto en (Pappus, 2023: 19-21 (24)) como en (Pappus, 2010: 127-130 (#27-28)), lo que no deja de ser sorprendente ya que Eutocio señala en sus *Comentarios* que su fuente es la perdida obra de Nicomedes *Sobre las líneas conchoides* mientras que Papo afirma en (Pappus, 2010: 128 (#28)) que «Nicomedes ha expuesto [obviamente en su obra *Sobre las líneas conchoides*] únicamente la construcción para ello [para la obtención de las dos medias proporcionales], mientras que yo también he incluido la prueba de la construcción». Una posible explicación de esta aparente

contradicción es que el ejemplar de la obra de Nicomedes que sirvió como fuente a Eutocio incluyera la prueba de Papo sin ningún comentario sobre su autoría. En la actualidad, la mayor parte de los expertos atribuyen el resultado a Nicomedes, sin perjuicio de que la prueba de la construcción estuviera más o menos desarrollada en su tratado original y que quizás fuera la aportación de Papo la que hubiera servido de base a Eutocio para sus *Comentarios*.

Proposición 6. Construcción de la inserción.

Sea AB una recta, supongamos determinado un ángulo BAG en A y sea P un punto exterior. Vamos a obtener un punto H en la recta AG determinada por el ángulo dado de forma que, si llamamos K al punto de intersección de las rectas AB y PH , entonces el segmento KH tenga una longitud prefijada.

Demostración. Tracemos desde el punto P la recta PD perpendicular a AB y prolonguémosla hasta un punto C de forma que DC sea igual a la longitud prefijada. Dibujemos ahora la línea concoide ECF con polo en P , base la recta AB y radio la longitud DC tal como se indica en la figura 11.

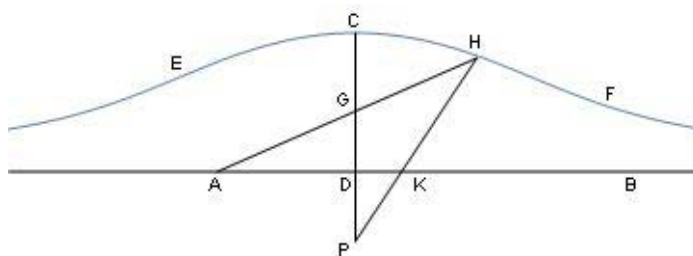


Figura 11. Construcción de la inserción.

Por la proposición 3 sabemos que la recta AG cortará a la línea concoide en un punto, al que llamamos H . Si llamamos K al punto resultante de la intersección de PH con AB , sigue de la génesis de la concoide que KH es igual a la longitud prefijada como se requería.

A continuación de la construcción de la inserción Papo introduce un comentario, al que no se refiere Eutocio, en el que señala la posibilidad de construir la *neusis* mediante una simple manipulación mecánica, evitando la utilización de la concoide, en los siguientes términos: «Algunos, no obstante, en aras de la utilidad, colocan una regla en P y la mueven hasta que, mediante prueba, el segmento que resulta entre la recta AB y la línea ECH tenga la longitud dada» (Pappus, 2010: 128 (#28)).

Obviamente, la explicación no es muy afortunada, pues tal como está redactada parece exigir que se haya trazado previamente la concoide ECH , que es precisamente lo que se quiere evitar. Es obvio que lo que Papo quería decir es que moviendo la regla que pasa por P ,

manteniendo siempre este punto como pivote, puede conseguirse mediante prueba que la longitud en la que esta sobresale de la recta AB sea igual a la magnitud prefijada la cual, para facilitar la operación, podría haberse marcado previamente en el extremo de dicha regla.

Resulta llamativo que Papo se refiera expresamente a la posibilidad de evitar la utilización de la conchoide, lo que podría ser debido a que, como él mismo probó en (Pappus, 2010: 150-152 (#41-42)), esta *neusis* es sólida y, por tanto, la utilización de la línea ideada por Nicomedes sería «un grave error en el que caen los geómetras» según la cita del propio maestro alejandrino que apuntamos en la introducción.

Proposición 7. Obtención de dos medias proporcionales utilizando la línea conchoide.

Demostración. Sean $AB=b$ y $BC=a$ ³⁶ dos segmentos dados que disponemos en ángulo recto. Hemos de encontrar dos medias proporcionales, en proporción continua, entre ambas magnitudes. Para ello, sea ABCD el paralelogramo completado³⁷ y tracemos por B una recta que corte a CD en el punto medio F.³⁸ Prolonguemos esta recta hasta cortar a la recta DA en el punto H. Dado que los triángulos BCF y HFD son iguales,³⁹ sigue que $HD=BC=a$. Tomemos el punto medio E del segmento DA y consideremos el punto P que está en la perpendicular a DA trazada desde E, de forma que $AP = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$, todo ello tal como se indica en la figura 12.

Tracemos ahora por A una recta paralela a HP y consideremos la conchoide de base dicha recta, polo P y radio $\frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$. Llamemos K al punto de la conchoide que pertenece a la recta HDA, que existe en virtud de la proposición anterior, y unamos P con K. Este segmento cortará a la recta base de la conchoide en un punto J, por lo que $JK = \frac{b}{2}$. Finalmente consideremos la recta KB y prolonguemosla hasta que corte en un punto M a la recta que pasa por D y C.

Una vez hecha esta construcción vamos a probar que $y=AK$ y $MC=x$ son medias proporcionales, en proporción continua, entre AB y BC, esto es, probaremos que

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{MC} = \frac{MC}{BC}$$

36. La notación se realiza a los únicos efectos de facilitar la lectura de la prueba al lector moderno, si bien las magnitudes AB y BC no eran números para los matemáticos griegos.

37. Euclides (I, 12 y I, 31).

38. Euclides (I, 10).

39. Euclides (I, 26 y I, 29).

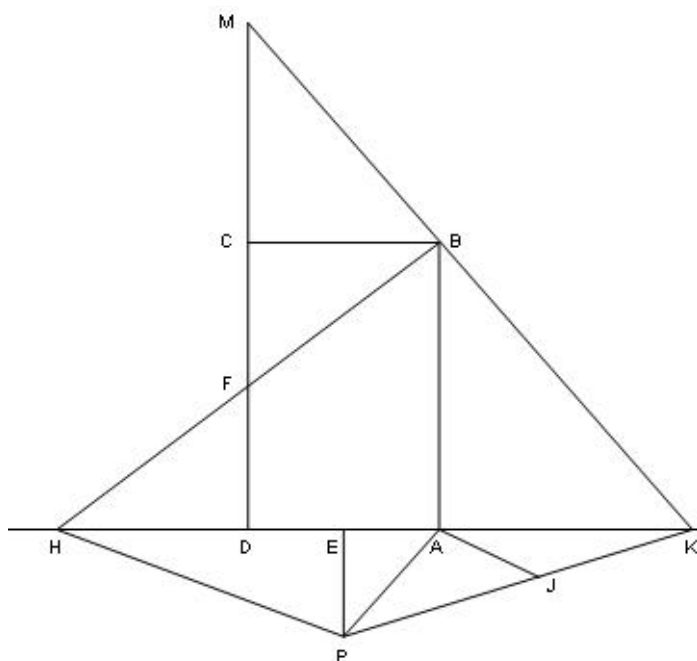


Figura 12. Obtención de dos medias proporcionales por Nicomedes.

En efecto, observemos en primer lugar que⁴⁰

$$DK \cdot AK + EA^2 = EK^2 \leftrightarrow (y + a) \cdot y + \frac{a^2}{4} = \left(y + \frac{a}{2}\right)^2$$

Sumando ahora a ambos miembros EP^2 y aplicando el teorema de Pitágoras⁴¹ obtenemos que

$$DK \cdot AK + AP^2 = PK^2$$

Por otra parte, como el segmento BC es paralelo a DK sigue que cortará proporcionalmente los lados DM y KM del triángulo DMK⁴² y, en consecuencia, $\frac{MC}{CD} = \frac{MB}{BK}$. Razonando de

40. Euclides (ii,6).

41. Euclides (i,47).

42. Euclides (vi,2).

la misma forma, teniendo en cuenta esta vez que AB es paralelo a DM, se obtiene que $\frac{MB}{BK} = \frac{DA}{AK}$, de donde sigue que $\frac{MC}{CD} = \frac{DA}{AK}$, esto es,⁴³ $MC \cdot AK = CD \cdot DA$.

Como además se tiene que $DA = \frac{HA}{2}$ y $CD = 2CF$, sigue que $MC \cdot AK = CF \cdot HA$, esto es,⁴⁴ $\frac{MC}{CF} = \frac{HA}{AK}$.

Si consideramos ahora el triángulo HPK y tenemos en cuenta que HP y AJ son paralelas, sigue que $\frac{HA}{AK} = \frac{PJ}{JK}$.⁴⁵

Así obtenemos que $\frac{MC}{CF} = \frac{PJ}{JK}$ y como $CF = JK = \frac{b}{2}$, sigue que $MC = PJ = x$.

Además, se tiene que⁴⁶

$$DM \cdot MC + CF^2 = MF^2 \leftrightarrow (x + b) \cdot x + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Pero también hemos probado que $DK \cdot AK + AP^2 = PK^2$ y como $AP = CF = \frac{b}{2}$ y $MF = PK = \frac{b}{2} + x$ sigue que $DK \cdot AK = DM \cdot CM$. Así⁴⁷ $\frac{DM}{DK} = \frac{AK}{MC}$.

Pero por la semejanza de los triángulos MDK, BAK y MCB se tiene, respectivamente, que $\frac{DM}{DK} = \frac{AB}{AK}$ y $\frac{AB}{AK} = \frac{MC}{BC}$, de donde sigue que

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AK}{MC} = \frac{MC}{BC}$$

como queríamos probar.

El problema de la duplicación del cubo es un problema sólido, como se sabe desde que Menecmo lo resolvió en el siglo IV a. de C. por medio de la intersección de una hipérbola equilátera y una parábola o de dos parábolas (Arquímedes y Eutocio, 2005: 372-375 (III, 78,15-84,12)). Sin embargo, Papo no solo no rechaza en el Libro III de *La Colección* el uso de la conoide para la resolución de este problema, sino que la solución de Nicomedes es una de las seleccionadas para ser incluida en su tratado. Más aún, en el Libro IV vuelve sobre la cuestión y vincula de forma directa la génesis de la conoide con el problema del mesolabio si bien, como hemos señalado, se refiere a la posibilidad de construir la inserción precisada de forma mecánica, evitando la utilización de la línea ideada por Nicomedes. En relación con esta cuestión debe tenerse en cuenta que la utilización de la conoide para la obtención de medias proporcionales, en proporción continua, entre dos segmentos dados

43. Euclides (vi,16).

44. Euclides (vi,16).

45. Euclides (vi,2).

46. Euclides (ii,6).

47. Euclides (vi,16).

podía ser más conveniente que la utilización de cónicas porque mientras que en este último caso es necesario dibujar dos curvas, en el primero basta con construir una. En este sentido se podría considerar, como se señala en (Cuomo, 2007: 163), que la concoide representaba una sustitución válida de las secciones cónicas y también, quizás por esto, Papo no se mostró expresamente reticente a la utilización de la concoide en el marco de la resolución del problema de Delos, a pesar de que era muy consciente de que se infringía el principio de homogeneidad que él mismo estableció en su clasificación de los problemas geométricos como planos, sólidos y lineales.

Para concluir el artículo, quizás merezca la pena referirnos de nuevo a Descartes y su *Geometría*, como se hizo al finalizar la sección segunda, con objeto de incidir en que este en su obra también trata los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo, aunque con un punto de vista radicalmente diferente al de los clásicos (Descartes, 1947: 181-184). En efecto, el análisis que realiza Descartes es puramente algebraico, reduciendo estos problemas geométricos a ecuaciones, lo que muestra claramente tanto la novedad de su procedimiento como la potencia del mismo. Por ello, no es de extrañar que en (Marqués de L'Hospital, 1998: 17) se apunte que Descartes «abandonó a los antiguos» y gracias a su audacia fue capaz de alcanzar «una infinidad de concepciones novedosas y útiles sobre la física y sobre la geometría». No obstante, el análisis de su aportación rebasa los límites de este trabajo centrado en la matemática griega.

Conclusiones

Los tres problemas clásicos de la geometría griega, aunque eran de imposible solución en los términos en que fueron planteados, resultaron ser una fuente inagotable de inspiración para casi todos los geómetras relevantes de la Antigüedad y, una vez acabada esta etapa, para muchos matemáticos posteriores, hasta que en el siglo XIX pudo probarse dicha imposibilidad. En la búsqueda de soluciones jugó un papel fundamental la introducción de nuevas curvas, distintas a las rectas y a las circunferencias, y la aparición de estas abrió las puertas a nuevos campos de conocimiento e investigación.

La concoide de Nicomedes es una de las curvas más interesantes definidas por los matemáticos griegos y tiene muchas y muy interesantes aplicaciones. De la comparación entre las diferentes fuentes disponibles se observa la evolución operada entre Nicomedes y Papo en la definición de la curva, poniéndose de relieve la importancia creciente de determinar su *symptoma* o propiedad fundamental por encima, incluso, de los movimientos implicados en su génesis y de los mecanismos ideados para su trazado. En este sentido se considera el trabajo de Papo como un antecedente del de Descartes en el camino hacia la identificación de las curvas con sus ecuaciones, que es la aportación fundamental de la geometría analítica. Asimismo, se reflexiona sobre el estudio conjunto de las tres curvas lineales realizado por Papo en el Libro IV de *La Colección*, profundizando en la hipótesis de que tenía por misión dar un estatus respetable a estas curvas en el seno de la geometría que contribu-

yera a superar las dificultades conceptuales derivadas de su definición como movimientos sincronizados.

En relación con los tres problemas clásicos, la conchoide vino a dar una nueva respuesta al problema de la duplicación del cubo, alternativa a la obtenida con anterioridad utilizando las cónicas, y al de la trisección del ángulo, diferente de las halladas por Hipias y Arquímedes (o quizás Conón)⁴⁸ utilizando, respectivamente, la cuadratriz y la espiral.

En el artículo incidimos en la idoneidad de la conchoide para la resolución de problemas que requieran una inserción entre dos líneas, una de las cuales es una recta, y profundizamos en esta técnica que fue ampliamente utilizada por los matemáticos helenos en sus diagramas, si bien el papel de la *neusis* fue variando con el paso de los años pasando de una concepción meramente mecánica que se aplicaba sin más, a entenderse la necesidad de analizarla específicamente.

No se conoce quien ideó el procedimiento de trisección de un ángulo utilizando una inserción, pero se ha especulado que pudo ser obra de Arquímedes dada su maestría en el manejo de esta técnica, si bien no hay que descartar que fuera ya conocida en la época de Euclides. En el artículo se pone el énfasis en que este método fue el que sugirió a Nicomedes la concepción de la curva. También se advierte que Nicomedes obvió la definición de la línea, limitándose a diseñar un compás específico para trazarla. De esta forma dio la espalda a la tradición platónica que repudiaba el uso de instrumentos sensibles en la geometría y contribuyó al cambio de mentalidad que se fue produciendo en la etapa alejandrina y que favoreció el interés por rebasar las limitaciones derivadas de la regla y el compás y por las aplicaciones de la ciencia al mundo real.

En relación con el problema de la duplicación del cubo, se analizan las dos fuentes disponibles, poniendo de manifiesto los diferentes propósitos de Eutocio y Papo al escribir sus obras. Mientras que Eutocio tuvo el propósito declarado de realizar una memoria exhaustiva del problema délico, incluyendo todas las aportaciones a las que tuvo acceso y numerosos datos históricos de interés, Papo fue mucho más selectivo y eligió únicamente aquellas soluciones que permitían obtener las medias proporcionales instrumentalmente, con lo que también demostró su independencia respecto de los moldes impuestos por el platonismo. Además, Papo mostró un interés que no se encuentra en Eutocio por clasificar los problemas como sólidos, lo que da pie en el artículo a reflexionar sobre el estatus de la conchoide como una sustitución válida de las secciones cónicas.

48. La trisección del ángulo utilizando la espiral no está recogida en la obra de Arquímedes *Sobre las líneas espirales* y Papo atribuye a Conón la concepción de la curva en (Pappus, 2010: 119 (#21)). Un estudio más detallado puede consultarse en (Ayerbe, 2025).

Bibliografía

ARQUÍMEDES y EUTOCIO (2005). *Tratados I y Comentarios*. Introducciones, traducción y notas de Paloma Ortiz García. Madrid: Gredos.

AYERBE, J.M. (2017). «El nacimiento de la geometría analítica». *Lecturas Matemáticas*, 38 (2), p. 93-124.

AYERBE, J.M. (2025). «La espiral de Arquímedes y los problemas clásicos de la geometría griega». *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 49 (192), p. 645-672.

CUOMO, S. (2007). *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity*. Cambridge: Cambridge University Press.

DESCARTES, René (1947). *La Geometría*. Traducción e introducción de Pedro Rossell Soler. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

EUCLIDES (1991, 1994, 2008). *Elementos*. Vol. I, II y III. Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Madrid: Gredos.

HEATH, T. (1980). *A history of Greek mathematics*. Vol. I. New York: Dover Publications.

KLEIN, F. (1993). «Famous Problems of Elementary Geometry». En: *Famous Problems and Other Monographs*. New York: Chelsea Publishing Company.

KNORR, W.R. (1993). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. New York: Dover Publications.

LEIBNIZ, G.W. (1987). *Análisis Infinitesimal*. Estudio preliminar de Javier de Lorenzo. Traducción de Teresa Martín Santos. Madrid: Tecnos.

MARQUÉS DE L'HOSPITAL (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. Traducción e introducción de Rodrigo Cambray Núñez. México: Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM.

NETZ, R. (2004). *The works of Archimedes*. Volume 1: The Two Books On the Sphere and the Cylinder. Translation and Commentary. Cambridge: Cambridge University Press.

PAPPUS (2010). *Book 4 of the Collection*, Edited with translation and commentary by Heike Seifrid-Weis. London: Springer.

— (2023). *Book III of the Mathematical Collection*, Translated into English by John B. Little. Worcester: Holy Cross Bookshelf.63.

PLUTARCO (2006). *Vidas paralelas III, Marcelo*. Introducción, traducción y notas de Paloma Ortiz García. Madrid: Gredos.

PROCLUS (1992). *A commentary on the first book of Euclid's Elements*, Translated, with introduction and notes, by Glenn R. Morrow. Foreword by Ian Mueller. Princeton: Princeton University Press.

VERA, F. (1970). *Científicos Griegos*. Vol. I. Madrid: Aguilar.

ZEUTHEN, H.G. (1886). *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*. Kopenhagen: Reimpresión Hildesheim 1966.